UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Teoría Geométrica de la Medida

Autor/es

INMACULADA CABERO MORÁN

Director/es

FRANCISCO JAVIER PÉREZ LÁZARO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Teoría Geométrica de la Medida

Realizado por:

Inmaculada Cabero Morán

Tutelado por:

Francisco Javier Pérez Lázaro

Logroño, 27 de junio de 2018

Resumen

En este trabajo trataremos una introducción a la teoría geométrica de la medida. Veremos la medida de Hausdorff, fórmula del área y coarea.

Para poder hallar la longitud, área o volumen de una variedad necesitamos conocer previamente nociones básicas de teoría de la medida. El primer paso es construir la medida exterior de Lebesgue, pero ésta no es suficiente si queremos, por ejemplo, hallar el área de una superficie en $\mathbb{R}^3$, por lo que construimos la medida exterior de Hausdorff. A partir de la ella podemos definir las fórmulas del área y de la coarea, que generalizan el teorema de cambio de variable y el teorema de Fubini respectivamente, aplicado, de forma más general, a funciones Lipschitz. Gracias a estas fórmulas, podemos obtener de manera sencilla las fórmulas conocidas de geometría diferencial para hallar longitudes y áreas.

Abstract

In this paper we will introduce the geometric measure theory. We will see Hausdorff measure and area and coarea formulas.

To be able to find the length, area or volume of a manifold, we should previously know basic notions of measure theory. The first step is to build the outer Lebesgue measure, but it is not enough if we want, for example, to find the area of a surface in $\mathbb{R}^3$, so we build the outer Hausdorff measure. From it, we can define the area and coarea formulas, which generalize the change of variable theorem and the Fubini theorem respectively, applied, more generally, to Lipschitz functions. Thanks to these formulas, we can easily obtain the known formulas of differential geometry to find lengths and areas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El concepto de medida nace de la necesidad de hallar la longitud, área y volumen de distintas figuras en distintas dimensiones. Intuitivamente tenemos una idea de lo que esto significa: la longitud es la línea que obtenemos al medir con una regla, el volumen es el espacio que ocupa un objeto, etc. Antiguamente, ya los egipcios se interesaron por hallar la medida diferentes figuras. Estos dieron una aproximación del número π, que se recoge en el *Papiro de Moscú*, de 1800 a.C, en el cual se afirma que el área de un círculo es similar a la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro del círculo disminuido en 1/9.

Posteriormente, en el 300 a.C, Euclídes publicó su libro *Los Elementos*, donde se recogen las primeras demostraciones rigurosas sobre teoremas relativos al cálculo de áreas y volúmenes, pero sin definiciones de longitud, área o volumen.

En 1854, el matemático alemán Bernhard Riemann publicó en un articulo la conocida integral de Riemann de una función f en un intervalo acotado, que se puede extender a dominios acotados de $\mathbb{R}^n$ sin dificultad. Usualmente se denota como

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Fue en 1883 cuando Cantor dio una definición de medida (distinta de la definición actual), y Peano, en 1887, a partir de definiciones anteriores consideró una medida exterior y otra medida interior. Definió los conjuntos medibles como aquellos donde la medida exterior e interior coincidían. Además, relacionó las funciones integrables Riemann con los conjuntos medibles.

Pero la integral de Riemann se nos queda corta en ciertos casos. En 1881, Volterra publicó un ejemplo de función derivable en todo punto, con derivada acotada, pero esta derivada no era Riemann integrable. Más tarde, Borel consideró la aditividad numerable en sus medidas, la cual fue una propiedad básica que permitió obtener los resultados fundamentales en la teoría de integración abstracta, que fue desarrollada por Henri León Lebesgue. Fue él quien, en 1901, describió la denominada medida de Lebesgue, y al año siguiente reformuló el concepto de integral de Riemann a una clase más amplia de funciones reales, extendiendo los dominios donde una integral puede definirse, dando lugar así a la conocida integral de Lebesgue. La integral de Lebesgue permite saber cuándo es posible tomar límites bajo el signo de la integral.

¿Pero nos es suficiente la medida de Lebesgue para calcular la longitud, área y volumen de cualquier variedad? La respuesta es no. Notemos que si intentamos calcular la longitud de una curva en $\mathbb{R}^2$, su medida de Lebesgue es 0, ya que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ representa área. Si intentamos calcular el área de una superficie en $\mathbb{R}^3$ con la medida de Lebesgue, volveríamos a obtener medida de Lebesgue 0, ya que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$ representa volumen y no área.

Aunque es cierto que con la integral de Lebesgue podemos calcular longitudes de curvas, y en general con las fórmulas conocidas de la geometría diferencial "medir" variedades diferenciables, no tenemos un concepto de medida longitud en $\mathbb{R}^2$ o medida superficie en $\mathbb{R}^3$ que cumpla las propiedades que debe cumplir una medida. Nuestro propósito en este trabajo es mostrar este tipo de medidas, que son las conocidas medidas de Hausdorff.

Podemos señalar también el conjunto de Cantor, el cual tiene medida de Lebesgue nula, es decir, longitud nula. Sin embargo, con la medida de Hausdorff no solo somos capaces de definir medidas longitud (dimensión 1), área (dimensión 2), sino que podemos definir medidas de dimensión fraccionaria, que es el tipo de dimensión que se puede asociar al conjunto de Cantor. Este tema no lo trataremos en este trabajo, sino que consideraremos dimensiones enteras.

Los conceptos de medida y dimensión de Hausdorff fueron introducidos en el trabajo *Dimensión y Medida Exterior*[4] de Felix Hausdorff en 1919.

Siendo más concretos, la medida exterior de Hausdorff $p-$dimensional se define como

$$H_p = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta},$$

donde, para $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$H_{p,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_p \operatorname{diam}(B_n)^p : A \subset \bigcup B_n, \operatorname{diam}(B_n) \leq \delta \right\},$$

y γ_p es la medida $p-$dimensional de Lebesgue de la bola de radio $1/2$ de $\mathbb{R}^p$.

A lo largo del trabajo comprobaremos que la medida de Hausdorff $1-$dimensional de una curva coincide con su longitud o la medida de Hausdorff $2-$dimensional de una superficie coincide con su área, es decir, veremos que las fórmulas ya conocidas para hallar la longitud y área de una variedad diferenciable coinciden con la medida de Hausdorff de la variedad. Es decir, demostraremos que si C es una curva diferenciable sin autointersecciones (en paramétricas, $f : [a, b] \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^m$),

entonces
$$H_1(C) = \int_a^b \sqrt{(f_t^1)^2 + \ldots + (f_t^m)^2}\, dt.$$

La herramienta para obtener la igualdad anterior será la fórmula del área (Teorema 3.13). Esta fórmula es una generalización del teorema de cambio de variable que se ve en asignaturas de Análisis, ya que la función de cambio de variable, en este caso, va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, donde $n \leq m$ (a diferencia del teorema de cambio de variable donde $m = n$). Además, esta función puede ser Lispchitz en vez de derivable.

Como hemos indicado antes, con esta fórmula obtendremos directamente que la medida de Hausdorff de una variedad diferenciable coincide con la "medida"dada por las fórmulas ya conocidas de la geometría diferencial.

Además, en este trabajo consideraremos la fórmula de la coarea, la cual nos dice que

$$\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy,$$

para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $m \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ y Jf el jacobiano de f.

Consideremos entonces un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^2$. Aplicando el teorema de Fubini a este conjunto, para calcular su área (su medida) integramos las longitudes de las secciones verticales u horizontales. En la fórmula de la coarea, la integral del segundo miembro es la suma de todas las medidas de las curvas de nivel 1, en general no ortogonales a los ejes, que se cruzan con A. Cubriendo todo A de esta manera, no obtenemos su tamaño, sino algo distinto que depende del jacobiano de f. Por este motivo, de manera sencilla, la fórmula de la coarea podemos definirla como una generalización curvilínea del teorema de Fubini. Por ejemplo, supongamos $m \leq n$. Sea la proyección

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_m) \end{array}.$$

Entonces se tiene que

$$Jf(x) = \det\left(Df(x) \circ Df^*(x)\right) = 1,$$

por lo que, para este caso concreto, la fórmula de la coarea coincide con el teorema de Fubini.

En este trabajo abordaremos todos estos temas, desde la medida de Lebesgue hasta la medida de Hausdorff, incluyendo la fórmula del área y de la coarea, ya que, como se ha visto, son de suma importancia a la hora de calcular longitudes, áreas y volúmenes.

Este trabajo consta de 4 capítulos incluyendo la introducción, la cual se ha realizado tomando como referencia [1, 2, 5]. Primero recordaremos las nociones básicas de teoría de la medida, como son, por ejemplo, las definiciones de medida, medida exterior, $\sigma-$álgebra, hasta llegar a construir la medida exterior de Lebesgue. Una vez construida, al ver que no podemos medir todo lo deseado con ella, definimos la medida de Hausdorff. También probaremos que la medida de Hausdorff $0-$dimensional corresponde con la medida de contar. Tal como definiremos la medida de Hausdorff, veremos que es igual a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, probando primero que la medida de Hausdorff es múltiplo de la medida de Lebesgue y luego probando que ese múltiplo es 1, definiendo para ello γ_n como la medida de Lebesgue de la bola centrada en 0 y de radio $1/2$.

En el siguiente capítulo nos centraremos en la fórmula del área. Primero recordaremos cómo vienen definidas las funciones Lipschitz y las propiedades asociadas ellas. Enunciaremos el teorema de Rademacher y veremos propiedades algebraicas sobre funciones lineales ortogonales, simétricas, diagonales y adjuntas, junto con la definición del jacobiano de una función. A partir de ahí, enunciaremos y demostraremos algunos teoremas previos y necesarios para la formulación y demostración de la fórmula del área.

Una vez visto esto, veremos varias aplicaciones, como son calcular la longitud de una curva paramétrica, el área de un gráfico, el área de una hipersuperficie paramétrica, las subvariedades o el demostrar el cambio de variable visto en cursos de análisis. Utilizando la fórmula del área, ver esto es sencillo y directo.

A continuación, en el siguiente capítulo trataremos la fórmula de la coarea, la cual únicamente enunciaremos. A continuación se verá su similitud a Fubini, y podremos, gracias a ella, calcular, por ejemplo, el área de una variedad en $\mathbb{R}^3$. Veremos la dificultad que supone utilizar coordenadas polares a medida que aumentamos la dimensión, ya que integrar estas funciones sería complicado. Para ello enunciaremos en forma de teorema una aplicación de la fórmula de la coarea que nos simplifica estos cálculos.

Capítulo 2

Medidas de Hausdorff

2.1. Preliminares de teoría de la medida

En esta sección comenzaremos por definir conceptos básicos de teoría de la medida, que podemos encontrar también en [1, 3]. Los teoremas que veremos en esta sección no se demostrarán, ya que, en su mayoría, son conceptos vistos en la asignatura de Análisis Real y Funcional de la carrera, pero todas las demostraciones se pueden encontrar en [1, 3].

Definición 2.1. Sea X un conjunto arbitrario. Llamaremos semianillo a una colección de subconjuntos no vacía $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple:

- Si $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_0$.
- Si $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}_0$ disjuntos y tales que $A - B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Definición 2.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}_0$ un semianillo de subconjuntos de X. Diremos que una aplicación $\mu : \mathcal{A}_0 \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida si cumple:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- Es numerablemente aditiva, es decir, dados $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ disjuntos y cuya unión esté en $\mathcal{A}_0$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejemplo 2.1. El conjunto de intervalos semiabiertos $\mathcal{A}_0 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ es un semianillo en $\mathbb{R}$. Se puede ver que $\mu((a, b]) = b - a$ es una medida en $\mathcal{A}_0$.

Así tenemos definida una medida sobre una clase reducida de conjuntos, por lo que queremos extenderla a una clase más amplia. Para ello damos la siguiente definición.

Definición 2.3. Una medida exterior en X es una función

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

verificando que:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- Si $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de X entonces

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Las medidas exteriores no cumplen la aditividad, sino únicamente la subaditividad, lo que implica que puede ocurrir que exista un conjunto que al partirlo en dos, la suma de sus medidas exteriores sea mayor que la medida exterior del conjunto original.

A continuación, mediante la siguiente proposición, construimos una gran cantidad de medidas exteriores.

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X y $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera, tales que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset X$,*

$$\mu^*(B) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

define una medida exterior (medida exterior generada por μ), para la que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, para $A \in \mathcal{C}$. Además si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un semianillo y μ una medida, μ^* coincide con μ sobre $\mathcal{A}_0$.

Ejemplo 2.2 (Medida exterior de Lebesgue). En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y $\mu(a, b] = b - a$, entonces, por la proposición 2.1, para $A \subset \mathbb{R}$, la medida exterior de Lebesgue viene definida como:

$$m^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

y además, $m^*((a, b]) = \mu((a, b]) = b - a$.

Definición 2.4. Sea X un conjunto arbitrario. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$) es una $\sigma-$ álgebra si:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

• Para cada sucesión numerable $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le denomina espacio medible.

Definición 2.5. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, con $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra. Entenderemos por medida sobre la $\sigma-$álgebra, una función no negativa

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

que satisface:

• $\mu(\emptyset) = 0$.

• Es numerablemente aditiva, es decir, dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.6. (i) Una medida μ en $\mathbb{R}^n$ es Borel regular si μ es Borel y para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$ existe un conjunto B Borel tal que $A \subseteq B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

(ii) Una medida μ en $\mathbb{R}^n$ se denomina medida de Radon si μ es Borel regular y $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 (Aproximación por conjuntos abiertos y compactos)**.** *Sea μ una medida de Radon en $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

(i) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U\, abierto\}.$$

(ii) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mu-$ medible,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K\, compacto\}.$$

Recordemos que una medida es numerablemente aditiva. Nuestro propósito es localizar la $\sigma-$álgebra donde las medidas externas sean numerablemente aditivas.

Definición 2.7. Sea μ^* una medida exterior en X. Diremos que $A \subset X$ es μ^*- medible si

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \forall E \subset X.$$

Denotaremos con $\mathcal{M}_{\mu^*}$ la familia de los conjuntos μ^*- medibles.

Teorema 2.2 (Teorema de Caratheodory)**.** *Sea X un conjunto, μ^* una medida exterior en X. Entonces:*
• *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ es un $\sigma-$ álgebra.*
• *La restricción de μ^* a los μ^*- medibles $(\mathcal{M}_{\mu^*})$ es una medida.*
• *Si además μ^* era la media exterior generada por la medida μ de un semianillo $\mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Los dos teoremas anteriores nos permiten construir una amplia clase de medidas en los Borelianos, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Centrémonos ahora en la medida de Lebesgue.

Hemos construido una medida exterior m^*. Ahora, por el teorema de Caratheodory, tenemos que la resticción de m^* a los medibles es una medida, y además, como está generada por la medida del semianillo de los intervalos semiabiertos, $\mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}_{m^*}$. Por lo tanto, tiene que contener a la menor $\sigma-$álgebra que contiene a los intervalos semiabiertos, la de los Borelianos.

En $\mathbb{R}$ cubríamos por intervalos de la forma $(a, b]$. Si lo extendemos a $\mathbb{R}^d$, podemos cubrir con rectángulos I de la forma $I = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d]$. Definimos $m_d(I)$ como el producto $\displaystyle\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$. Así, podemos definir la medida exterior de Lebesgue más general en $\mathbb{R}^d$ como:

Definición 2.8. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. Se define la medida exterior de Lebesgue del conjunto A como

$$m_d^*(A) := \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m_d(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \text{ rectángulo semiabierto en } \mathbb{R}^d\right\},$$

donde el ínfimo se toma en todos los cubrimientos de A por uniones numerables de rectángulos semiabiertos en $\mathbb{R}^d$ definidos anteriormente.

Siguiendo el mismo argumento que en $\mathbb{R}$, obtendríamos para $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la medida de Lebesgue m_d^*.

Notemos que si intentamos calcular el área de una superficie de $\mathbb{R}^3$ con la medida de Lebesgue, no somos capaces, ya que obtendríamos medida de Lebesgue 0, ya que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$ representa volumen y no área, por lo que necesitamos otra medida capaz de ello. Veamos ahora la medida de Hausdorff.

2.2. Medida de Hausdorff

En esta sección nos centraremos en la distancia euclídea, pero los siguientes resultados se pueden aplicar a cualquier espacio métrico, obteniendo resultados diferentes.

Las medidas de Hausdorff permiten medir los conjuntos de dimensión p en un espacio métrico, como por ejemplo las superficies en $\mathbb{R}^3$ o las longitudes de las curvas.

Veamos cómo se construye la medida exterior de Hausdorff.

Definición 2.9. Llamamos diámetro de un $B \subset \mathbb{R}^d$ al valor

$$\operatorname{diam}(B) = \sup \{d(x, y) : x, y \in B\},$$

donde d es la distancia.

Ahora para cada $p > 0$ y $\delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset X$ vale

$$H_{p,\delta}(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_p \operatorname{diam}(B_n)^p : A \subset \bigcup B_n, \operatorname{diam}(B_n) \leq \delta \right\},$$

donde[1]

$$\gamma_p = \frac{m_p^*(B)}{2^p} = \frac{\pi^{p/2}}{2^p \Gamma(1 + (p/2))}$$

y las cuales, por la proposición 2.1, son medidas exteriores que verifican que[2]

$$\delta \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\varepsilon}(A),$$

y por tanto existe el límite, que se puede ver que también es medida exterior

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A),$$

que llamamos la medida exterior $p-$dimensional de Hausdorff.

[1] En el libro [1] podemos comprobar que esta constante γ_n es la anteriormente mencionada.

[2] Esto es aplicado de forma general, pero, para entenderlo, podemos ver un ejemplo finito y extenderlo: Si tomamos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, entonces es obvio que $A \subset B$. Como la función H mide el ínfimo, entonces tendríamos que $H(A) = \text{ínf}\{a, b, c\}$, que podría ser a, b o c. Sin embargo $H(B) = \text{ínf}\{a, b, c, d, e, f\}$ que podría ser a, b o c, es decir, $H(A)$, o podría ser d, e o f. Por lo tanto, $H(B) \leq H(A)$.

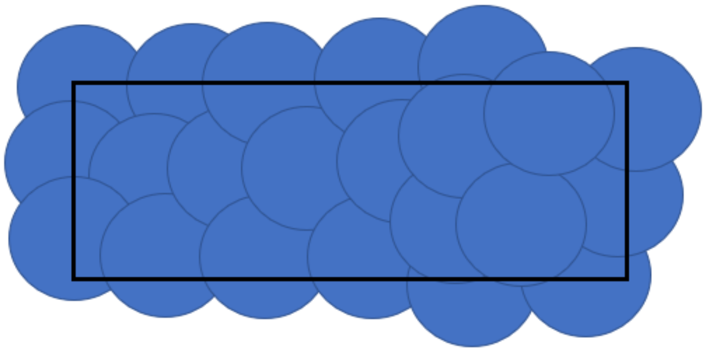

Figura 2.1: Ejemplo de un posible cubrimiento por bolas de un rectángulo.

Definición 2.10. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $A \subset X$ y $B \subset X$, con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, dos conjuntos cualesquiera. Entonces podemos definir la distancia entre los conjuntos A y B como:

$$d(A, B) := \text{ínf}\left\{d(x, y) : x \in A, y \in B\right\}.$$

Definición 2.11. Diremos que una medida exterior (μ^* en $\mathbb{R}^d$ con la distancia euclídea) es métrica si dados $A, B \subset X$ tales que $d(A, B) > 0$,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Proposición 2.2. *Si μ^* es una medida exterior métrica en $\mathbb{R}^d$, entonces $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Teorema 2.3. *$H_p : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.*

Demostración. Podemos encontrar la demostración en [1, pág. 43, Teorema 1.6.3]. □

Como hemos visto en el teorema anterior que $H_p(A)$ es una medida exterior métrica en $\mathbb{R}^d$, entonces, por la proposición 2.2, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{M}_{H_p}$.

Definición 2.12. Llamamos medida de Hausdorff $p-$dimensional a la restricción de H_p a los Borelianos $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Estudiemos ahora la medida exterior de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$ dependiendo de su dimensión. Veremos que:

- Si es $0-$dimensional, entonces corresponde con al medida de contar.
- Si es $1-$dimensional corresponde con la longitud de la curva.
- Si es $d-$dimensional, con $d \in \mathbb{N}$, entonces corresponde con la medida de Lebesgue .

Definición 2.13. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\mu(A)$ como el número de elementos de A. Si A tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos, entonces $\mu(A) = n$, y si A es un conjunto de infinitos elementos, entonces $\mu(A) = \infty$. A esto es lo que denominamos la medida de contar.

Teorema 2.4. *H_0 corresponde con la medida de contar.*[3]

Demostración. Sea

$$H_{0,\delta}(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_0 \operatorname{diam}(B_n)^0 : A \subset \bigcup B_n, \operatorname{diam}(B_n) \leq \delta\right\}$$
$$= \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} 1 : A \subset \bigcup B_n, \operatorname{diam}(B_n) \leq \delta\right\}.$$

Dado un conjunto de n elementos, tomamos bolas de radio menor que $\frac{1}{2}$ y menor que δ. Veamos que $H_0(A) \leq n$. Para un conjunto de n elementos, tomamos δ menor que la mitad de la distancia que separa cada par de puntos. Nótese que $H_{0,\delta}(A) \leq n$, y por tanto, tomando límite cuando δ tiende a 0, tenemos que $H_0(A) \leq n$.

Nótese que si quiero cubrir un conjunto de n elementos con diámetro menor que delta, necesito al menos n conjuntos no vacíos, ya que ningún conjunto puede cubrir dos puntos. Por tanto, se tiene que $H_0(A) \geq n$.

□

Definición 2.14. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de extremos a, b, abierto o cerrado, $I = (a, b)$ o $I = [a, b]$ y $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua. Dado $T \subset I$ un subconjunto finito y ordenado $(t_1 < t_2 < \ldots)$, denotaremos la longitud de la poligonal correspondiente con

$$p(T) = \sum_{i=1}^{m} \| \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \|_2$$

y definimos la longitud de σ como

$$L(\sigma) := \sup\{p(T) : T \subset I \text{ finito}\}.$$

Teorema 2.5. *Siempre se tiene que $L(\sigma) \geq H_1(\sigma(I))$, y si σ es inyectiva (salvo en un número finito de puntos), entonces $L(\sigma) = H_1(\sigma(I))$.*

[3] Se tomará como convenio que $\operatorname{diam}(\emptyset)^0 = 0$, $\operatorname{diam}(A)^0 = 1$, con $A \neq \emptyset$, en particular debemos entender que $\operatorname{diam}(\{x\})^0 = 1$.

Demostración. La demostración no la haremos, pero se puede consultar en [1, pág 51]. □

Lema 2.6. *Sea $B = B(0,1)$ la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^n$, m_n^* la medida de Lebesgue y $Q = [0,1]^n$ el cubo unidad, entonces*

$$\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq H_n(Q) \leq \gamma_n \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

Demostración. Veamos que $\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq H_n(Q)$.

Sea $\delta > 0$, $Q \subset \bigcup A_i$ y $\operatorname{diam}(A_i) < \delta$.

Para cada i elegimos un $x_i \in A_i$, $r_i = \operatorname{diam}(A_i)$ y la bola $B_i = B(x_i, r_i)$. Por tanto, $A_i \subset B_i$ y así se tiene entonces que $Q \subset \bigcup A_i \subset \bigcup B_i$. Tomando medidas de Lebesgue[4], se tiene que

$$1 = m_n^*(Q) \leq m_n^*\left(\bigcup B_i\right) \leq \sum m_n^*(B_i) = \sum r_i^n m_n^*(B).$$

Tomando el ínfimo sobre todos los posibles cubrimientos tenemos

$$\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq \gamma_n \operatorname{ínf}\left\{\sum r_i^n : Q \subset \bigcup A_i, \operatorname{diam}(A_i) < \delta, r_i = \operatorname{diam}(A_i)\right\} =$$

$$= H_{n,\delta}(Q) \leq H_n(Q).$$

Veamos ahora que $H_n(Q) \leq \gamma_n (\sqrt{n})^n$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\delta_m = \frac{2\sqrt{n}}{m}$. Ahora dividimos $[0,1]$ en m intervalos de la siguiente manera:

$$\left[0, \frac{1}{m}\right], \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \ldots, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right].$$

Entonces, $Q = \bigcup Q_i$, donde Q_i son los m^n cubos formados por todos los productos $n-$dimensionales de los intervalos anteriores. Además, dados $x, y \in [0,r]^n$,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{nr^2} = r\sqrt{n}.$$

Se tiene que la igualdad se alcanza cuando $x = (0, \ldots, 0)$ e $y = (r, \ldots, r)$.

Entonces, tendremos que $\operatorname{diam}(Q_i) = \frac{\sqrt{n}}{m} < \delta_m$ y $H_{n,\delta_m}(Q) \leq \gamma_n \sum_{i=1}^{m^n} \operatorname{diam}(Q_i)^n =$

[4]Notemos que $m_n^*(B_i) = m_n^*(B(x_i, r_i)) = m_n^*(x_i + r_i B(0,1)) = m_n^*(r_i B(0,1)) = r_i^n m_n^*(B(0,1))$.

$= \gamma_n m^n \frac{(\sqrt{n})^n}{m^n} = \gamma_n (\sqrt{n})^n.$

Tomando límite cuando $m \longrightarrow \infty$, entonces $\delta_m \longrightarrow 0$, y se tiene que $H_n(Q) \leq \gamma_n (\sqrt{n})^n$. □

Lema 2.7. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces, si $\epsilon > 0$, existen bolas cerradas y disjuntos $B_n \subset A$ con $0 < \operatorname{diam}(B_n) < \epsilon$ tales que*

$$m_n^*(A) = \sum m_n^*(B_n).$$

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [1, pág. 230, Lema 5.6.1]. □

Teorema 2.8 (Desigualdad isodiamétrica)**.** *Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,*

$$m_n^*(A) \leq m_n^*(B(0, \operatorname{diam}(A)/2)).$$

Demostración. Este teorema se puede demostrar de varias maneras. Una demostración se puede ver en [1, pág. 232, Teorema 5.6.3]. □

Teorema 2.9. *H_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Nótese que la medida de Haussdorf es invariante por traslaciones, ya que el diámetro de un conjunto lo es. Esto es un resultado conocido de teoría de la medida [1, pág 38, Teorema 1.5.19], que las únicas medidas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones en las que el cubo unidad tiene medida finita son múltiplos de la medida de Lebesgue. Veamos ahora que este múltiplo es 1. Definamos γ_n como viene a continuación:

$$\gamma_n = m_n^*(B(0, 1/2)).$$

Para ver que la medida de Lebesgue corresponde con la medida de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$, veamos que $H_n(C) = 1$, donde $C = [0,1]^n$. Veamos primero que $1 \leq H_n(C)$.

Sean B_i tales que $\operatorname{diam}(B_i) < \delta$, con $\delta > 0$, tales que $C \subset \cup B_i$. Se tiene que, aplicando medidas de Lebesgue y aplicando el Teorema 2.8,

$$1 = m_n^*(C) \leq \sum_i m_n^*(\bar{B}_i) \leq \sum_i m_n^*(B(0, \operatorname{diam}(B_i)/2)) = m_n^*(B(0, 1/2)) \sum_i \operatorname{diam}(B_i)^n.$$

Por tanto, se tiene que

$$1 \leq m_n^*(B(0, 1/2)) \sum_i \operatorname{diam}(B_i)^n.$$

Tomando ínfimos a ambos lados de la desigualdad y teniendo en cuenta que $\gamma_n = m_n^*(B(0,1/2))$, se tiene que

$$1 \leq H_{n,\delta}(C) \leq H_n(C).$$

Veamos ahora la otra desigualdad.

Consideremos el cubo unidad abierto $A = (0,1)^n$. Sea $\delta > 0$. Por el Lema 2.7 se tiene que existen bolas cerradas y disjuntas $B_i \subset A$ con $0 \leq \operatorname{diam}(B_i) < \delta$ tales que

$$1 = m_n^*(A) = \sum_i m_n^*(B_i),$$

por lo que se tiene a su vez que $m_n^*(A - \cup B_i) = 0$. Entonces se tiene que

$$0 \leq H_{n,\delta}(A - \cup B_i) \leq H_n(A - \cup B_i) = 0,$$

ya que habíamos probado que la medida de Hausdorff era un múltiplo de la medida de Lebesgue, y $m_n^*\,(A - \cup B_i) = 0$.

Como además el radio de cada B_i es $\operatorname{diam}(B_i)/2$, y teniendo nuevamente en cuenta que $m_n^*(B(0,1/2)) = \gamma_n$, se tiene que

$$H_{n,\delta}(A) \leq H_{n,\delta}(\cup B_i) \leq \sum_i \gamma_n \operatorname{diam}(B_i)^n =$$

$$= \sum_i m_n^*(B(0, \operatorname{diam}(B_i)/2)) = \sum_i m_n^*(B_i) = 1.$$

Por tanto,

$$H_{n,\delta}(A) \leq 1.$$

Pero como $m_n^*(\partial C) = 0$ entonces $H_n(\partial C) = 0$, ya que habíamos probado que la medida de Lebesgue es un múltiplo de la medida de Hausdorff. Por tanto se tiene que $H_{n,\delta}(C) = H_{n,\delta}(A)$, lo que implica que $H_{n,\delta}(C) \leq 1$. Haciendo tender δ a cero, se tiene que $H_n(C) \leq 1$.

Así hemos probado que nuestro múltiplo es 1, lo que implica que $H_n = m_n^*$ en $\mathbb{R}^n$.

Esta γ_n se puede comprobar que es igual a $\frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1+\frac{n}{2})}$ probando que $m_n^*(B(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, lo cual podemos ver, por ejemplo, en [1, pág. 224, Ejemplo 5.5.18]. $\square$

Capítulo 3

Fórmula del área

En este capítulo y en el siguiente se verán la fórmula del área y coarea. También estudiaremos las funciones Lipschitz continuas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Todo ello se puede encontrar en [2].

Hay dos casos diferentes dependiendo del tamaño de m y n:

• Si $m \geq n$, la fórmula de área afirma que la medida $n-$dimensional de $f(A)$, teniendo en cuenta la multiplicidad, se puede calcular integrando el Jacobiano apropiado de f sobre A.

• Si $m \leq n$, la fórmula de la coarea establece que la integral de la $n - m$ medida dimensional de los conjuntos de niveles de f se puede calcular integrando el Jacobiano. Esta afirmación es una generalización del teorema de Fubini.

En el primero de estos capítulos, comenzaremos con un estudio detallado de las propiedades de diferenciabilidad de las funciones Lipschitz continuas y enunciaremos el teorema de Rademacher. Luego discutiremos las aplicaciones lineales e introduciremos los jacobianos. A continuación se verá la fórmula del área y aplicaciones de ésta. En el siguiente capítulo nos centraremos en la fórmula de la coarea y sus aplicaciones.

3.1. Preliminares

Nota 3.1. A lo largo de lo que queda de trabajo, utilizaremos $|\cdot|$ para indicar la norma euclídea.

Definición 3.1. (i) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ para alguna constante c , $\forall x, y \in A$. A la función f anterior se le denomina función Lipschitz.

(ii) La constante más pequeña que cumple que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|\ \forall x, y$ se denota como

$$Lip\,(f) := \sup\left\{\frac{|f\,(x) - f\,(y)\,|}{|x-y|} : x, y \in A, x \neq y\right\}.$$

Así, $|f\,(x) - f\,(y)\,| \leq Lip\,(f)\,|x-y| \;\; x, y \in A.$

(iii) La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple que si para cada compacto $K \subseteq A$ existe una constante c_K tal que $|f\,(x) - f\,(y)\,| \leq c_K|x-y| \;\; \forall x, y \in K$ se denomina localmente Lipschitz.

Teorema 3.1 (Extensión de aplicaciones de Lipschitz)**.** *Asumimos $A \subset \mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz continua. Entonces existe una función Lipschitz continua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

(i) $\tilde{f} = f$ en A.

(ii) $Lip\left(\tilde{f}\right) \leq \sqrt{m}\, Lip\,(f)$.

Definición 3.2. La función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{y \to x} \frac{|f\,(x) - f\,(y) - L\,(y-x)\,|}{|x-y|} = 0,$$

o equivalentemente,

$$f\,(y) = f\,(x) + L\,(y-x) + o\,(|y-x|) \quad y \to x.$$

Nota 3.2. Si esta aplicación L existe, es única. Ésta se denota como $Df\,(x)$, la derivada de f sobre x.

A continuación enunciaremos el teorema de Rademacher, un teorema que es de suma importancia, ya que a partir de una función Lipschitz podemos asegurar que dicha función es diferenciable, lo cual es sorprendente, ya que ya que la desigualdad $|f(x) - f(y)| \leq Lip(f)|x-y|$ aparentemente no implica la diferenciabilidad.

Teorema 3.2 (Teorema de Rademacher)**.** *Asumimos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función localmente Lipschitz continua. Entonces f es m_n^*- c.t.p. diferenciable.*

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [2, pág.103]. □

Teorema 3.3 (Diferenciabilidad en conjuntos de niveles)**.**

(i) *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función localmente Lipschitz continua, y* $Z := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. *Entonces* $Df(x) = 0$ *para* m_n^*- *c.t.p.* $x \in Z$.

(ii) *Sean* $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *funciones localmente Lipschitz continuas, e* $Y := \{x \in \mathbb{R}^n | g(f(x)) = x\}$. *Entonces* $Dg(f(x)) Df(x) = I$ *para* m_n^*- *c.t.p.* $x \in Y$.

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en [2, pág. 107, Teorema 3.3]. □

Definición 3.3. (i) Una aplicación lineal $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es ortogonal si

$$(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrica si

$$x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Una aplicación lineal $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diagonal si exixten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$Dx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) Sea $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal. El adjunto de A es una aplicación lineal $A^* : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$x \cdot (A^* y) = (A^* x) \cdot y \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

A continuación recordaremos una serie de propiedades acerca de las aplicaciones anteriormente definidas del álgebra lineal.

Teorema 3.4.

(i) $A^{**} = A$.

(ii) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

(iii) $O^* = O^{-1}$ *si* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es ortogonal.*

(iv) $S^* = S$ *si* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es simétrica.*

(v) *Si* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es simétrico, entonces existe una aplicación ortogonal* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y una aplicación diagonal* $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $S = O \circ D \circ O^{-1}$.

(vi) Si $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es ortogonal, entonces* $n \leq m$ *y* $O^* \circ O = I$ *en* $\mathbb{R}^n$.

$$O \circ O^* = I \text{ en } O(\mathbb{R}^n).$$

Nota 3.3. A continuación usaremos notación matricial, en algunos ejemplos, como sigue:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array},$$

donde $\overrightarrow{x}$ es una vector columna de $\mathbb{R}^n$ y A es una matriz $m \times n$. Al hacer $A\overrightarrow{x}$ obtendría un vector columna de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 3.1 (Ejemplos de distintas aplicaciones).

Aplicación ortogonal: Sea

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array},$$

donde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se cumple que $O^* \circ O = I$ en $\mathbb{R}^2$ y que $O \circ O^* = I$ en $O(\mathbb{R}^3)$, donde O^* es el adjunto de O. Se puede comprobar que $A^T \cdot A = I$ en $\mathbb{R}^2$ y $A \cdot A^T = I$ en $O(\mathbb{R}^2)$.

Aplicación simétrica: Sea

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array},$$

donde $A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Se cumple que $S^* = S$.

Teorema 3.5 (Descomposición polar)**.** *Sea* $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación lineal.*

(i) Si $n \leq m$, $\exists$ *una aplicación simétrica* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y una aplicación ortogonal* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tal que* $L = O \circ S$.

(ii) Si $m \leq n$, $\exists$ *una aplicación simétrica* $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y una aplicación ortogonal* $O : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $L = S \circ O^*$.

Demostración. La demostración se puede encontrar en [2, pág. 110, Teorema 3.5]. □

Definición 3.4. Asumimos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal.

(i) Si $n \leq m$, escribimos $L = O \circ S$ como anteriormente, y definimos el Jacobiano de L como $[[L]] = |\det(S)|$.

(ii) Si $m \leq n$, escribimos $L = S \circ O^*$ como anteriormente, y definimos el Jacobiano de L como $[[L]] = |\det(S)|$.

Ejemplo 3.2 (Ejemplo de descomposición polar y jacobiano). Sea

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,0) & \mapsto & (5,-1,0) \\ & (0,1) & \mapsto & (7,-1,0) \end{array}$$

una aplicación lineal. Podemos descomponer L en una aplicación simétrica S y una ortogonal O, como por ejemplo pueden ser:

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,0) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ & (0,1) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0) & \mapsto & \left(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right) \\ & (0,1) & \mapsto & \left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \end{array}.$$

Matricialmente lo podríamos expresar como:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & L\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } L = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & O\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & S\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces se tiene que $O \circ S = A$.

Se tiene también que $[[L]] = |\det(S)| = 2$.

Nota 3.4. En el siguiente teorema veremos que la definición de $[[L]]$ es independiente de la elección particular de O y S. Observemos que $[[L]] = [[L^*]]$.

Teorema 3.6 (Jacobianos y adjuntos).

(i) Si $n \leq m$, $[[L]]^2 = \det(L^* \circ L)$.

(ii) Si $m \leq n$, $[[L]]^2 = \det(L \circ L^*)$.

Definición 3.5. (i) Si $n \leq m$, definimos

$$\Lambda(m,n) := \{\lambda : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,m\} \,|\lambda \text{ es creciente}\}.$$

(ii) Para cada $\lambda \in \Lambda(m,n)$, definimos $P_\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_m) := \left(x_{\lambda(1)},\ldots,x_{\lambda(n)}\right).$$

(iii) Para cada $\lambda \in \Lambda(m,n)$, definimos el subespacio $n-$dimensional

$$S_\lambda := \mathit{span}\left\{e_{\lambda(1)},\ldots,e_{\lambda(n)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Entonces, P_λ es la proyección en $\mathbb{R}^m$ sobre S_λ.

Teorema 3.7 (Fórmula de Binet-Cauchy)**.** *Asumimos que* $n \leq m$ *y* $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es lineal. Entonces*

$$[[L]]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det(P_\lambda \circ L))^2.$$

Nota 3.5. Para hallar $[[L]]^2$ calculamos las sumas de los cuadrados de los determinantes de cada $(n \times n)$ submatriz de la matriz $(m \times n)$ que representa L.

Nota 3.6. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f^1,\ldots,f^m)$, escribimos la matriz gradiente como

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \ldots & f^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^m_{x_1} & \ldots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

en cada punto donde Df existe.

Definición 3.6. Para un punto x de m_n^*- c.t.p., definimos el Jacobiano de f como

$$Jf(x) := [[Df(x)]].$$

3.2. Fórmula del área

Teorema 3.8. *(i) Sean* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una función Lipschitz continua,* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $0 \leq s < \infty$. *Entonces*

$$H_s(f(A)) \leq (Lip(f))^s H_s(A).$$

(ii) Suponemos $n > k$ y sea $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la función proyección. Asumimos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $0 \leq s < \infty$. Entonces

$$H_s(P(A)) \leq H_s(A).$$

Lema 3.9. *Sea $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicación diagonal. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$m_n^*(D(A)) =\mid \det(D) \mid m_n^*(A).$$

Demostración. <u>Caso 1:</u> Si $|\det(D)| = 0$.

Supongamos que el primer elemento de la diagonal principal es cero. Se tiene que todos los elementos de $D(A) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces

$$m_n^*(D(A)) \leq m_n^*(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = 0,$$

pero como la medida no puede ser negativa, entonces $m_n^*(D(A)) = 0$.

<u>Caso 2:</u> Si $|\det(D)| > 0$.

Es fácil ver que si $R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$, entonces $D(R) = (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1] \times \cdots \times (\lambda_n a_n, \lambda_n b_n]$. Po tanto, se tiene que

$$|\det(D)| m_n^*(R) = m_n^*(D(R)).$$

Ahora, usando la definición de medida exterior de Lebesgue (Definición 2.8), es fácil deducir el lema.

□

Lema 3.10. *Suponemos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal, $n \leq m$. Entonces*

$$H_n\left(L\left(A\right)\right) = [[L]]\, m_n^*\left(A\right)$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

Demostración. Por el Teorema 3.5 podemos escribir L como $L = O \circ S$. Se tiene entonces que

$$H_n(L(A)) = H_n(O(S(A))) = H_n(S(A)),$$

ya que como la aplicación O me preserva las distancias, entonces me preserva la medida de Hausdorff. Ahora, como la medida de Hausdorff es la misma que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que

$$H_n(S(A)) = m_n^*(S(A)).$$

Ahora, escribimos S como $S = \bar{O} \circ D \circ \bar{O}^{-1}$, donde $\bar{O}$ es una aplicación ortogonal distinta de la O anterior. Se tiene entonces que, como la aplicación $\bar{O}$ es ortogonal, me preserva las distancias, entonces me preserva la medida de Hausdorff, pero como ésta coincide con la de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$m_n^*(S(A)) = m_n^*(\bar{O}(D(\bar{O}^{-1}(A)))) = m_n^*(D(\bar{O}^{-1}(A))).$$

Por Lema 3.10, se tiene que

$$m_n^*(D(\bar{O}^{-1})) = |\det(D)| m_n^*(\bar{O}^{-1}(A)).$$

Como como la aplicación $\bar{O}^{-1}$ también es ortogonal, entonces

$$m_n^*(\bar{O}^{-1}(A)) = m_n^*(A).$$

Por tanto, $H_n(L(A)) = |\det(D)| m_n^*(A)$.

Por último notar que $[[L]] = |\det(S)| = |\det(\bar{O})| \cdot |\det(D)| \cdot |\det(\bar{O}^{-1})| = |\det(D)|$, ya que $|\det(\bar{O})| = |\det(\bar{O}^{-1})| = 1$. □

Ejemplo 3.3 (Ejemplos concretos del lema anterior). Supongamos que queremos calcular el área de un rombo como el siguiente:

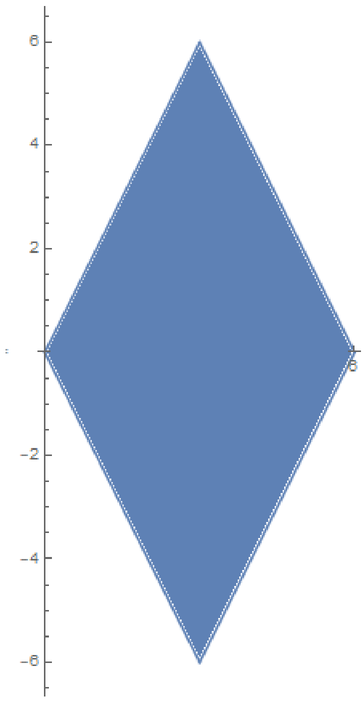

Figura 3.1: Imagen de un rombo en $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que el área de un rombo es $\frac{6 \cdot 12}{2} = 36$. Definimos

$$\begin{array}{rrcl} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0) & \longmapsto & (3,-6) \\ & (0,1) & \longmapsto & (3,6) \end{array}.$$

L transforma el cuadrado $A = [0,1]^2$ en el rombo $L(A)$, que es el de la imagen anterior (Figura 3.3). Veamos ahora que $H_2(L(A)) = [[L]]\, m_2^*(A) = 36$.

Se tiene que

$$[[L]] = \mid \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\right) \mid = \mid 18 + 18 \mid = 36,$$

y tenemos que

$$m_n^*(A) = \int_A dx = 1.$$

Por tanto, se tiene que $H_2(L(A)) = [[L]]\, m_2^*(A) = 36$.

Supongamos ahora que queremos hallar el área también de un rombo pero que está en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo del siguiente:

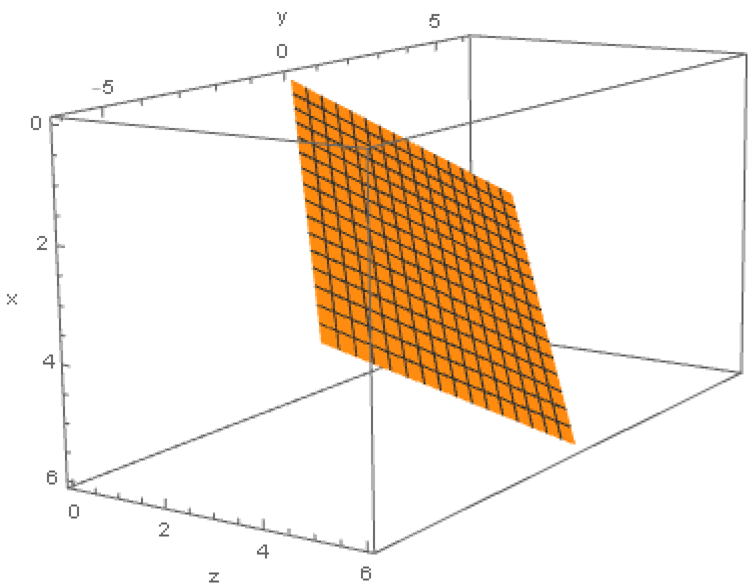

Figura 3.2: Imagen de un rombo en $\mathbb{R}^3$.

Calculemos $H_2(L(A))$ a partir del lema anterior, donde la aplicación L viene dada como:

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (1,0) & \longmapsto & (3,-6,5) \\ & (0,1) & \longmapsto & (3,6,1) \end{array}.$$

Se tiene que $H_2(L(A)) = [[L]]\, m_2^*(A)$, donde

$$[[L]]^2 = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2736.$$

Por tanto, $[[L]] = 12\sqrt{19} \approx 52{,}3068$. Por otro lado tenemos que

$$m_n^*(A) = \int_A dx = 1 \qquad \text{donde } A = [0,1) \times [0,1)\,.$$

Por tanto, se tiene que $H_2(L(A)) = [[L]]\, m_2^*(A) \approx 52{,}3068$.

Lema 3.11. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto m_n^*- medible y supongamos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz continua. Entonces*

(i) $f(A)$ es H_n- medible.

(ii) La aplicación $y \longmapsto H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$ es H_n- medible en $\mathbb{R}^n$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n \leq \left(Lip\left(f\right)\right)^n m_n^*\left(A\right).$

Demostración. (i).- Podemos suponer sin pérdida de generalidad A acotado. Supongamos que $\exists K_i \subseteq A$ compactos tales que, como la medida de Lebesgue es una medida de Radon (este hecho es muy conocido), por el apartado (ii) del Teorema 2.1,

$$m_n^*(K_i) \geq m_n^*(A) - \frac{1}{i} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Además, como $m_n^*(A) < \infty$ y A es m_n^*- medible, entonces se tiene que

$$m_n^*(A - K_i) \leq \frac{1}{i}.$$

Ya que f es continua, $f(K_i)$ es compacto y entonces también H_n- medible. Por lo tanto, $f(\cup_{i=1}^{\infty} K_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ es H_n- medible. Además,

$$H_n\left(f(A) - f\left(\cup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \leq H_n\left(f\left(A - \cup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right),$$

que, por el Teorema 3.8, se tiene que

$$H_n\left(f\left(A-\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)\right)\leq (Lip(f))^n m_n^*\left(A-\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)\leq (Lip(f))^n m_n^*\left(A-K_i\right)\leq \frac{1}{i}.$$

Haciendo que $i\to\infty$ tenemos que

$$m_n^*\left(A-\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)\leq 0,$$

pero como la medida de Lebesgue no puede ser negativa, entonces es igual a 0.

Como $m_n^*\left(A-\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)=0$, entonces $H_n\left(f(A)-f\left(\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)\right)=0$, que implica que $\left(f(A)-f\left(\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)\right)$ es H_n-medible, pero habíamos visto que $f\left(\cup_{i=1}^{\infty}K_i\right)$ era H_n-medible. Por lo tanto, $f(A)$ es H_n-medible.

(ii).- Sea

$$B_k:=\left\{Q\mid Q=(a_1,b_1]\times\ldots\times(a_n,b_n],a_i=\frac{c_i}{k},b_i=\frac{c_i-1}{k},c_i\in\mathbb{Z},i=1,\ldots,n\right\}.$$

Notemos que

$$\mathbb{R}^n=\cup_{Q\in B_k}Q.$$

Ahora, definamos g_k como

$$g_k:=\sum_{Q\in B_k}\mathcal{X}_{f(A\cap Q)},$$

la cual es H_n-medible por el apartado anterior. Se tiene que

$$g_k(y)=\text{número de cubos } Q\in B_k \text{ tales que } f^{-1}\{y\}\cap(A\cap Q)\neq\emptyset.$$

Haciendo que $k\to\infty$, se tiene que

$$g_k(y)\to H_0(A\cap f^{-1}\{y\})$$

para cada $y\in\mathbb{R}^m$. Por tanto, la aplicación tal que $y\mapsto H_0(A\cap f^{-1}\{y\})$ es H_n-medible.

(iii).- Por el teorema de convergencia monótona, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}g_k\,dH_n=\int_{\mathbb{R}^m}H_0(A\cap f^{-1}\{y\})\,dH_n.$$

Como $g_k=\sum_{Q\in B_k}\mathcal{X}_{f(A\cap Q)}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}g_k\,dH_n=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{Q\in B_k}\mathcal{X}_{f(A\cap Q)}\,dH_n=$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{X}_{f(A\cap Q)}\, dH_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} H_n(f(A\cap Q)).$$

Aplicando el Teorema 3.8, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} H_n(f(A\cap Q)) \leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} (Lip(f))^n m_n^*(A\cap Q) =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} (Lip(f))^n \sum_{Q\in B_k} m_n^*(A\cap Q) = (Lip(f))^n m_n^*(A).$$

□

Definición 3.7. La aplicación $y \longmapsto H_0\left(A\cap f^{-1}\{y\}\right)$ se denomina función de multiplicidad.

Lema 3.12. *Sea $t > 1$ y sea $B := \{x|Df(x)\text{ existe}, Jf(x) > 0\}$. Supongamos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz continua. Entonces hay una colección contable $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que*

(i) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

(ii) $f|_{E_k}$ *es inyectiva* $(k = 1, 2, \ldots)$.

(iii) Para cada $k = 1, 2, \ldots$ existe un automorfismo simétrico $T_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$Lip\left((f|_{E_k})\circ T_k^{-1}\right) \leq t.$$
$$Lip\left(T_k\circ (f|_{E_k})^{-1}\right) \leq t.$$
$$t^{-n}|\det(T_k)| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|\det(T_k)|.$$

Demostración. La demostración de este lema es la más técnica. Se puede encontrar en [2, pág. 117, Lema 3.3]. □

Teorema 3.13 (Fórmula de área)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua, $n \leq m$. Para cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ m_n^*- medible,*

$$\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A\cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n.$$

Demostración. Por el teorema de Rademacher, suponemos que $Df(x)$ y $Jf(x)$ existen $\forall x\in A$. Además, supongamos que $m_n^*(A) < \infty$.

Supongamos ahora que $A \subseteq \{Jf > 0\}$. Sea $t > 1$ fijo. Por el Lema 3.12 elegimos una colección contable $\{E_k\}$ de conjuntos de Borel, que asumimos disjuntos, tales que $A = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. Estos E_k se pueden tomar disjuntos ya que, dada una colección contable de conjuntos de Borel $\{M_k\}$, por el Lema 3.12, se tiene que $A = \cup_{k_1}^{\infty} M_k$, y podemos tomar los E_k disjuntos a partir de los M_k de manera que se tiene que $A = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. Definimos ahora B_k como

$$B_k := \left\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n], a_i = \frac{c_i}{k}, b_i = \frac{c_i + 1}{k}, c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n \right\},$$

es decir, B_k es una colección de cubos disjuntos de lado $\frac{1}{k}$ que completan el plano.

Definimos también F_j^i como

$$F_j^i := E_j \cap Q_i \cap A, \qquad \text{donde} \quad Q_i \in B_k, i, j = 1, 2, \ldots.$$

Entonces se tiene que los conjuntos F_j^i son disjuntos, ya que al suponer E_j disjuntos y al ser a su vez Q_i disjuntos, como F_j^i es la intersección de estos con el conjunto A, siempre obtendremos conjuntos disjuntos para los distintos valores de i, j. También se tiene que $A = \cup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i$, lo cual es obvio ya que teníamos que $A = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, y además $A \subset \cup_i Q_i$.

Veamos ahora que

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} H_n\left(f\left(F_j^i\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n. \tag{3.1}$$

Sea

$$g_k := \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{f(F_j^i)}.$$

Entonces se tiene que $g_k(y)$ es el número de conjuntos $\left\{F_j^i\right\}$ tales que $F_j^i \cap (f|_{E_k})^{-1}\{y\} \neq \emptyset$. Entonces tenemos que $g_k(y) \longrightarrow H_0(A \cap f|_{E_k}^{-1}\{y\})$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Aplicando el teorema de convergencia monótona se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH_n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \to \infty} g_k\, dH_n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{X}_{f(F_j^i)}\, dH_n =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{f(F_j^i)}\, dH_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} H_n(f(F_j^i)).$$

Notemos que, aplicando el Lema 3.12 y el Teorema 3.8 apartado (i), y teniendo en cuenta que H_n es igual a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$,

$$H_n(f(F_j^i)) = H_n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_j^i)) \leq t^n m_n^*(T_j(F_j^i)). \tag{3.2}$$

Por otro lado se tiene que

$$m_n^*(T_j(F_j^i)) = H_n(T_j \circ (f|_{E_j})^{-1} \circ f(F_j^i)) \leq t^n H_n(f(F_j^i)). \tag{3.3}$$

Entonces, se tiene que, multiplicando a ambos lados de la ecuación 3.2 por t^{-2n} y aplicando el Lema 3.10,

$$t^{-2n} H_n(f(F_j^i)) \leq t^{-n} m_n^*(T_j(F_j^i)) = t^{-n} |\det(T_j)| m_n^*(F_j^i).$$

Aplicando el apartado (iii) del Lema 3.12, tenemos que

$$t^{-n} |\det(T_j)| m_n^*(F_j^i) \leq Jf|_{E_j} m_n^*(F_j^i) = \int_{F_j^i} Jf\, dx \leq t^n |\det(T_j)| m_n^*(F_j^i).$$

Volviendo a aplicar el Lema 3.10 obtenemos que

$$t^n |\det T_j| m_n^*(F_j^i) = t^n m_n^*(T_j(F_j^i)),$$

que aplicando la ecuación 3.3, tenemos que

$$t^n m_n^*(T_j(F_j^i)) \leq t^{2n} H_n(f(F_j^i)).$$

Por tanto, tenemos que

$$t^{-2n} H_n(f(F_j^i)) \leq \int_{F_j^i} Jf\, dx \leq t^{2n} H_n(f(F_j^i)).$$

Sumando en i y en j tenemos que

$$t^{-2n} \sum_{i,j=1}^{\infty} H_n(f(F_j^i)) \leq \int_A Jf\, dx \leq t^{2n} \sum_{i,j=1}^{\infty} H_n(f(F_j^i)),$$

que haciendo tender k a infinito y aplicando la ecuación 3.1 obtenemos que

$$t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} H_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH_n \leq \int_A Jf\, dx \leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} H_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH_n.$$

Finalmente, como habíamos tomado un $t > 1$ fijo, hacemos que $t \to 1^+$ y tendríamos probada la fórmula del área cuando $A \subseteq \{Jf > 0\}$.

Supongamos ahora que $A \subseteq \{Jf = 0\}$. Fijamos un ϵ tal que $0 < \epsilon \leq 1$ y descomponemos la aplicación f como

$$f = p \circ g,$$

donde $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es la aplicación tal que

$$g(x) := (f(x), \epsilon x),$$

y $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es la aplicación proyección tal que

$$p(y, z) = y.$$

Veamos ahora que existe una constante C tal que

$$0 < Jg(x) \leq C\epsilon. \tag{3.4}$$

Escribimos $g = (f^1, \ldots, f^m, \epsilon x_1, \ldots, \epsilon x_n)$. Entonces se tiene que

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} Df(x) \\ \epsilon I \end{pmatrix}.$$

Ya que, por la Nota 3.5, tenemos que $Jg(x)^2 =$ suma de los cuadrados de los $(n \times n)$ subdeterminantes,entonces se tiene que que $Jg(x)^2 \geq \epsilon^{2n} > 0$, ya que uno de los posibles $(n \times n)$ subdeterminantes es $\mid \epsilon I \mid$, el cual es igual a ϵ^n. Por lo tanto, su cuadrado será ϵ^{2n}. Como $|Df| \leq Lip(f) < \infty$, podemos decir que

$$Jg(x)^2 = Jf(x)^2 + \left\{ \begin{array}{c} \text{suma de cuadrados de términos,} \\ \text{cada uno involucrando alguna fila de la} \\ \text{matriz } \epsilon I \end{array} \right\} \leq C\epsilon^2,$$

para cada $x \in A$. Por tanto se tiene que, como

$$Jf(x) = 0, 0 < Jg(x)^2 \leq C\epsilon^2 \Rightarrow 0 < Jg(x) \leq C\epsilon.$$

Por otra parte, como $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es la aplicación proyección definida anteriormente, podemos aplicar el caso anterior, ya que $Jg(x) > 0$, el apartado (ii) del Teorema 3.8 y la ecuación 3.4, y afirmar que

$$H_n(f(A)) \leq H_n(g(A)) \leq \int_{\mathbb{R}^{n+m}} H_0(A \cap g^{-1}\{y, z\})\, dH_n(y, z) =$$

$$= \int_A Jg(x)\, dx \leq \int_A C\epsilon\, dx = C\epsilon\, m_n^*(A).$$

Haciendo tender ϵ a cero, concluimos que $H_n(f(A)) = 0$, y entonces se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH_n = 0,$$

ya que el soporte de $H_0(A \cap f^{-1}\{y\}) \subseteq f(A)$. Pero entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_0(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH_n = 0 = \int_A Jf\, dx.$$

En el caso general podemos escribir $A = A_1 \cup A_2$ donde $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$ y $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$, y entonces aplicar los dos casos anteriormente probados para concluir la fórmula del área. □

Teorema 3.14 (Cambio de variable)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua, $n \leq m$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] dH_n(y).$$

Demostración. Caso 1: Tomamos g una función positiva. Podemos descomponer g como la suma de funciones simples positivas de la siguiente manera: $g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}$. Esto se puede comprobar que es cierto en [2, pág. 19, Teorema 1.12]. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\, dx.$$

Por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{A_i} Jf\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\, dx.$$

Por la fórmula del área,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A_i \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} H_0\left(A_i \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \mathcal{X}_{A_i}\, dH_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}\, dH_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] dH_n(y).$$

Caso 2: Descomponemos g como $g = g^+ - g^-$ y aplicamos el caso anterior. □

3.3. Aplicaciones

3.3.1. Longitud de una curva paramétrica

En este apartado queremos ver que la medida de Hausdorff 1−dimensional de una curva corresponde con la longitud de dicha curva.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua e inyectiva, $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Sean ahora $a, b \in (-\infty, +\infty)$, con $a < b$. Definimos la curva C como $C := f([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$.

Entonces, por lo estudiado a lo largo de la carrera, sabemos que la longitud de la curva viene dada como:

$$\text{longitud de } C = \int_a^b \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}\, dx.$$

Esto no nos lo habían demostrado anteriormente, pero ahora podemos demostrarlo de manera sencilla y directa gracias a la fórmula del área. Por tanto, veamos ahora que

$$H_1(C) = \int_a^b \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}\, dx.$$

Por una parte, se tiene que $Df = (f_x^1, \ldots, f_x^m)$ y $(Jf)^2 = [[Df]]^2 = \det(Df^* \circ Df) = (f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2$. Por lo tanto,

$$Jf = \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}.$$

Sea $A = [a, b]$. Por el teorema de la fórmula del área, tenemos que

$$\int_a^b Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_1(y).$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in A \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin A \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_1(y) = \int_C 1\, dH_1(y) + \int_{\mathbb{R}^m - C} 0\, dH_1(y) = H_1(C).$$

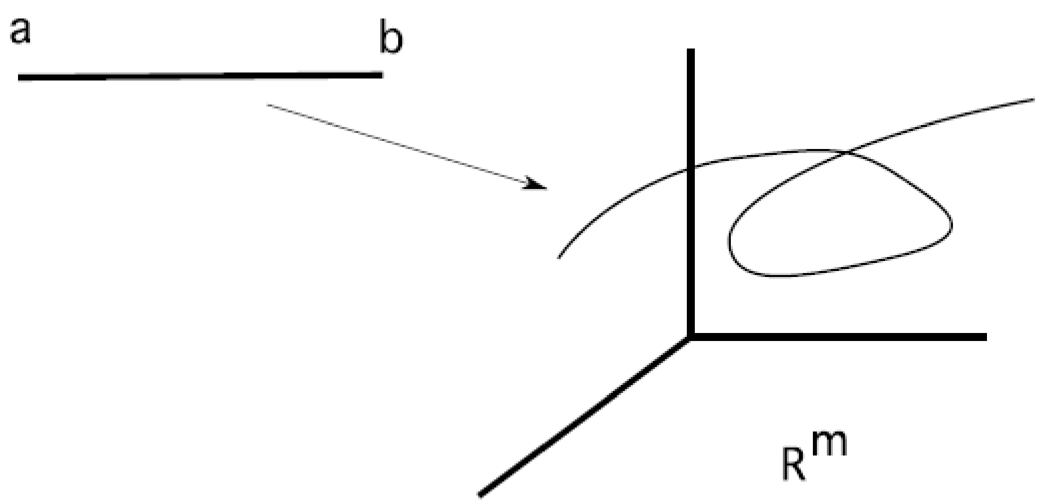

Figura 3.3: Parametrización de una curva en $\mathbb{R}^m$.

3.3.2. Área de un gráfico de una función ($n \geq 1$, $m = n+1$)

Veamos que la medida de Hausdorff $n-$dimensional del gráfico de una función corresponde con su superficie.

Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lipschitz continua. Para cada $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el gráfico de g sobre U como

$$G = G(g; U) := \{(x, g(x)) | x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definimos f como la parametrización de g, es decir, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donde $f(x) := (x, g(x))$. Entonces, se tiene que

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, por la nota 3.5,

$$(Jf)^2 = \text{suma de los cuadrados de los } n \times n \text{ subdeterminantes} = 1 + |Dg|^2.$$

Entonces,

$$H_n(G) = \text{superficie del gráfico G} = \int_U \left(1 + |Dg|^2\right)^{1/2} dx.$$

Demostrar esto en cursos pasados es complejo, pero gracias a la fórmula del área vista anteriormente podemos demostrarlo de una manera directa y sencilla. Veámoslo.

La segunda igualdad es conocida, ya que se ha estudiado en cursos anteriores de análisis. Veamos entonces que

$$H_n(G) = \int_U \left(1 + |Dg|^2\right)^{1/2} dx.$$

Tenemos que $(Jf)^2 = 1 + |Dg|^2$. Entonces, por la fórmula del área se tiene que

$$\int_U Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y).$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in U \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin U \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) = \int_G 1\, dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^m - G} 0\, dH_n(y) = H_n(G).$$

3.3.3. Área de una hipersuperficie paramétrica ($n \geq 1$, $m = n+1$)

Veamos que la medida de Hausdorff $n-$dimensional de una hipersuperficie paramétrica corresponde con su área $n-$dimensional.

Nótese que este caso engloba el caso anterior, ya que siempre se da que el área de un gráfico se puede ver como el área de una hipersuperficie paramétrica, pero el recíproco no siempre es cierto.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una función Lipschitz continua e inyectiva, $f = (f^1, \ldots, f^{n+1})$, y sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos la hipersuperficie paramétrica S como $S := f(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Se tiene entonces que

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{n+1}_{x_1} & \cdots & f^{n+1}_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Ahora, si denotamos $\widehat{f^k} = (f^1, f^2, \dots, f^{k-1}, f^{k+1}, \dots, f^{n+1})$, entonces se tiene que

$$(Jf)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2.$$

Entonces

$$H_n(S) = \text{área } n\text{−dimensional de } S = \int_U \left(\sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2 \right)^{1/2} dx.$$

Si nos ponemos a demostrar esta fórmula con los conocimientos de cursos anteriores, nos sería muy complejo, pero una vez vista en este trabajo la fórmula del área, su demostración es prácticamente directa. Veámoslo.

La segunda igualdad es conocida, ya que se ha estudiado en cursos anteriores de análisis. Veamos entonces que

$$H_n(S) = \int_U \left(\sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2 \right)^{1/2} dx.$$

Tenemos que $(Jf)^2 = \displaystyle\int_U \sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2$. Entonces, por la fórmula del área se tiene que

$$\int_U Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n(y).$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in U \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin U \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n(y) = \int_S 1\, dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^{n+1}-S} 0\, dH_n(y) = H_n(S).$$

Veamos ahora un ejemplo de la aplicación anterior.

Ejemplo 3.4 ($n = 2, m = 3$). Sea $f : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \sin(x_1 x_2))$ es la parametrización de una superficie en $\mathbb{R}^3$, donde $x = (x_1, x_2)$. Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix} \qquad Df^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_2\cos(x_1x_2) \\ 0 & 1 & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene que

$$(Jf)^2 = \det(Df^* \circ Df) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_2\cos(x_1x_2) \\ 0 & 1 & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 2 + x_2^2\cos^2(x_1x_2) & 1 + x_1x_2\cos^2(x_1x_2) \\ 1 + x_1x_2\cos^2(x_1x_2) & 1 + x_1^2\cos^2(x_1x_2) \end{pmatrix}\right) = 1 + 2x_1^2\cos^2(x_1x_2) -$$

$$-2x_1x_2\cos^2(x_1x_2) + x_2^2\cos^2(x_1x_2).$$

Por otra parte, sean $\widehat{f}^1 = (x_1 + x_2, \sin(x_1x_2))$, $\widehat{f}^2 = (x_1, \sin(x_1x_2))$ y $\widehat{f}^3 = (x_1, x_1 + x_2)$. Se tiene entonces que

$$D\widehat{f}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}$$

$$D\widehat{f}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix} \quad D\widehat{f}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene también que

$$(Jf)^2 = \sum_{k=1}^{3} |D\widehat{f^k}|^2 = (x_1\cos(x_1x_2) - x_2\cos(x_1x_2))^2 + x_1^2\cos^2(x_1x_2) + 1 =$$

$$= 1 + (2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\cos^2(x_1x_2).$$

Así, se tiene que, para $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, si $S := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces

$$H_2(S) = \text{área } 2\text{−dimensional de S} =$$

$$= \int_U \sqrt{1 + (2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\cos^2(x_1x_2)}\, dx \approx 85{,}3121.$$

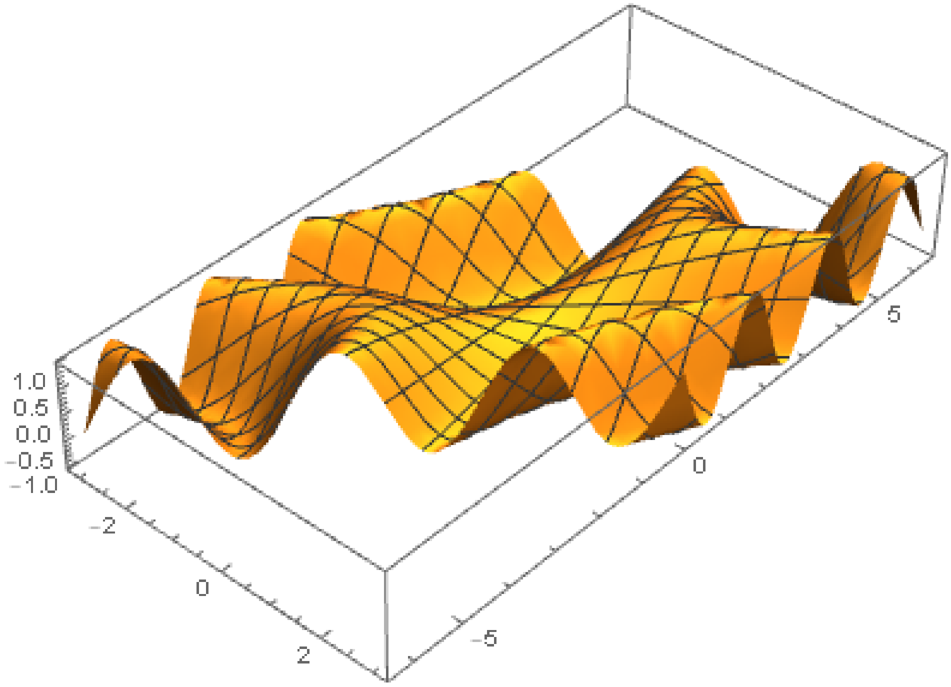

Figura 3.4: Representación de la función $f(x)$.

3.3.4. Subvariedades

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una subvariedad $n-$dimensional de una función Lipschitz continua. Supongamos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow M$ el gráfico de M. Sea un conjunto $A \subseteq f(U)$, donde A es Borel, y sea $B := f^{-1}(A)$. Definimos

$$g_{ij} := f_{x_i} \cdot f_{x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Entonces

$$(Df)^* \circ Df = ((g_{ij})),$$

y así

$$Jf = g^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } g := \det((g_{ij})).$$

Tenemos que probar que $H_n(A) = \displaystyle\int_B g^{\frac{1}{2}}\, dx$, lo cual no resulta difícil gracias a la fórmula del área. Veámoslo.

Tenemos que $Jf = g^{\frac{1}{2}}$. Ahora, por la fórmula del área, se tiene que

$$\int_B Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(B \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y).$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(B\cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\}\in B \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\}\notin B \end{cases}$

Por tanto, como $B = f^{-1}(A)$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(B\cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n(y) = \int_A 1\, dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^m - A} 0\, dH_n(y) = H_n(A).$$

3.3.5. Cambio de variable

Veamos ahora la relación que guardan el teorema de cambio de variable y la fórmula del área. Para ello, primero enunciamos este teorema.

Teorema 3.15 (Teorema de cambio de variable)**.** *Sea $u : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo. Sea $E \subseteq V$ un conjunto Lebesgue medible. Sea*
$f : E \longrightarrow [0,\infty]$ medible. Entonces $f\circ u\cdot Ju$ es medible, $u^{-1}(E)$ es Lebesgue medible, y

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{u^{-1}(E)} f(u(t))Ju(t)\, dt.$$

Para probar esto, basta con utilizar el Teorema 3.14. Se tiene que

$$\int_{u^{-1}(E)} f(u(t))Ju(t)\, dt = \int_E \left[\sum_{x\in u^{-1}\{y\}} f(u(t))\right] dH_n(y) = \int_E f(x)\, dx,$$

ya que, por el Teorema 2.9, H_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 4

Fórmula de la coarea

Como ya adelantamos en el capítulo anterior, si $m \leq n$, la fórmula de la coarea establece que la integral de la $n - m$ medida dimensional de los conjuntos de niveles de f se puede calcular integrando el Jacobiano. Esta afirmación es una generalización del teorema de Fubini. Definamos entonces la fórmula de la coarea.

Teorema 4.1 (Fórmula de la coarea)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua, $n \geq m$. Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ m_n^*-medible, se tiene que*

$$\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy.$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [2, pág. 134, Teorema 3.10].

□

Nota 4.1. Se puede observar que la fórmula de la coarea es una especie de generalización del teorema de Fubini. Esto ya se vio en la introducción.

Teorema 4.2 (Integración sobre conjuntos de niveles)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz , $n \geq m$. Para cada función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ m_n^*-integrable, se tiene que*

(i) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ *es $H_{n-m}-$integrable para $m_m^* - c.t.p.$*

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\, dH_{n-m}\right] dy.$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [2, pág. 193, Teorema 3.11].

□

4.1. Aplicaciones

Nuestro objetivo es hallar la superficie, volumen, de figuras en $\mathbb{R}^n$ descomponiéndolas en secciones o curvas de nivel. Por ejemplo, imaginemos que tenemos el siguiente rectángulo (Figura 4.1), ¿qué pasa si integramos las longitudes de las

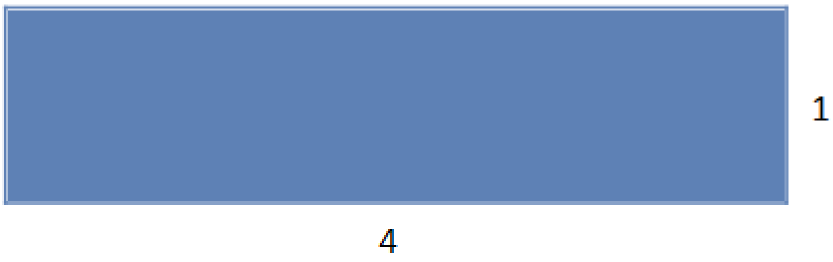

Figura 4.1: Rectángulo

líneas verticales? El teorema de Fubini nos dice que el área de nuestra figura es la integral de la longitud de las líneas verticales que lo componen, es decir,

$$\text{Área } = \int_0^4 1\,dx = 4.$$

Sin embargo, si analizamos la siguiente figura (Figura 4.2) , ¿qué ocurre si inte-

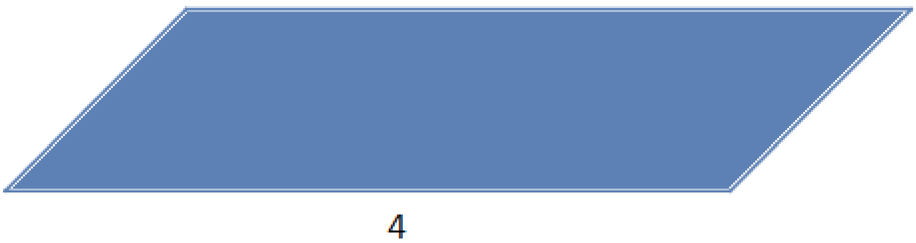

Figura 4.2: Paralelogramo

gramos las longitudes de los segmentos inclinados? Cada segmento tiene longitud $\sqrt{2}$, ya que forma un ángulo de 45º respecto a la base. ¿Qué representa entonces $\int_0^4 \sqrt{2}\,dx = 4\sqrt{2}$? Obviamente no es el área, ya que el área de la figura 4.2 es 4.

La fórmula de la coarea nos indica que la integral anterior es $\sqrt{2} \cdot$ área, y este $\sqrt{2}$ es el Jacobiano.

Imaginemos ahora que tenemos la siguiente esfera (Figura 4.3) en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué pasa si integramos todas las longitudes de los paralelos que la forman? ¿Obtendríamos la superficie total? La respuesta es no.

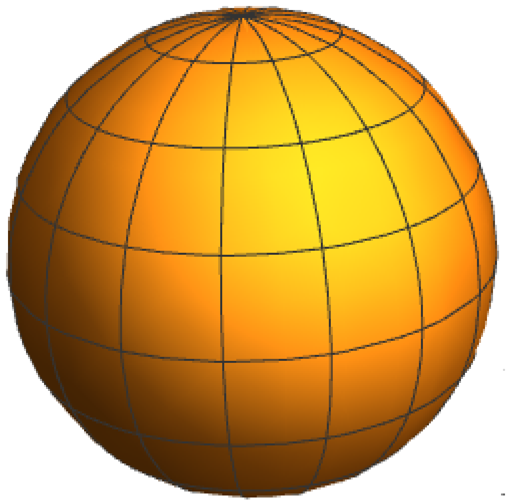

Figura 4.3: Imagen de una esfera en 3D

Supongamos que nuestra esfera está centrada en el origen y tiene radio 1. Las circunferencias que obtenemos seccionando nuestra esfera tienen longitud $2\pi\sqrt{1-z^2}$. Entonces, se tiene que

$$\int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1-z^2} = \pi^2,$$

pero el área de esta esfera es conocido (4π).

Probemos ahora que si integramos las curvas de nivel de la gráfica de una función $z = f(x,y)$ dada en paramétricas, no se obtiene la superficie total.

Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = f(x,y) \end{array}.$$

Por la fórmula de la coarea, se tendría que

$$\int_U Jf\,dx = \int_{\text{altura mínima}}^{\text{altura máxima}} H_1(\text{curvas de nivel de altura z})\,dz,$$

y tenemos que

$$\int_U Jf\,dx = \int_U \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy.$$

Ahora, por las aplicación 3.3.2 de la fórmula del área, se tiene que

$$\text{Área(U)} = \int_U (1 + |Df|^2)^{\frac{1}{2}} = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.$$

Por lo tanto, hemos visto que las integrales del Jacobiano de f no coinciden. Por tanto, no se cumple que

$$H_2(U) = \int_{\text{altura mínima}}^{\text{altura máxima}} H_1(\text{curvas de nivel de altura z})\, dz.$$

Supongamos que quiero hallar la integral de una función definida sobre una bola en $\mathbb{R}^n$. Un posible modo de hacerlo es utilizar un cambio a coordenadas polares. Sin embargo, las integrales que aparecen en el cambio a polares se vuelven más complejas a medida que aumentamos la dimensión.

Para simplificar estos cálculos, definamos el siguiente teorema sobre coordenadas polares como aplicación a la fórmula de la coarea.

Teorema 4.3 (Coordenadas polares)**.** *Sea* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función* m_n^*-*integrable. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g\, dH_{n-1} \right) dr.$$

En particular,

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(0,r)} g\, dx \right) = \int_{\partial B(0,r)} g\, dH_{n-1}$$

para $m_1^* - c.t.p.$ *y* $r > 0$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz tal que $f(x) := |x|$. Entonces se tiene que $Jf(x) = 1$. Entonces, por el Teorema 4.2 se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}\{r\}} g\, dH_{n-1} \right) dr = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial B(0,r)} g\, dH_{n-1} \right) dr.$$

Como $f(x) = |x|$,y el módulo de x siempre es positivo, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial B(0,r)} g\, dH_{n-1} \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g\, dH_{n-1} \right) dr.$$

□

Un caso particular del teorema anterior consistiría en tomar una función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ radial ($g(x) = h(|x|)$). Entonces se tendría que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\,dx = \int_0^\infty h(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho\,H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera $(n-1)-$dimensional que vive en $\mathbb{R}^n$.

A la hora de hallar la integral anterior, lo único que se debe calcular es $\int_0^\infty h(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho$, ya que $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ es conocido.

Otra aplicación a destacar son los conjuntos de niveles de funciones de distancia. La idea base de ello consiste en, dado un conjunto, hallar el área de la superficie comprendida entre todos los puntos que estén entre una distancia a y una distancia b de dicho conjunto, con $a < b$.

Teorema 4.4 (Conjuntos de niveles de funciones de distancia)**.** *Asumimos $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y compacto. Escribimos*

$$d(x) := dist(x, K) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Entonces, para cada $0 < a < b$ tenemos que

$$\int_a^b H_{n-1}(\{d = t\})\,dt = m_n^*(\{a \le d \le b\}).$$

Un caso particular de esto sería hallar el área de un círculo en $\mathbb{R}^2$. En este caso equivaldría a hallar la superficie comprendida entre una distancia r del centro de la esfera, donde r es el radio de ésta, y una distancia 0. El ejemplo en $\mathbb{R}^2$ se puede ampliar a $\mathbb{R}^n$.

Esta aplicación se puede ver como una generalización de las coordenadas polares, donde K sería el origen de coordenadas.

Conclusión

En este trabajo hemos hecho un análisis de parte de teoría geométrica de la medida tocando temas como son la medida exterior de Lebesgue, de Hausdorff y la fórmula del área y de la coarea.

Hemos podido ver que, por ejemplo, si queríamos hallar el área de una superficie en $\mathbb{R}^3$ utilizando la medida de Lebesgue no somos capaces, por lo que necesitábamos definir otra medida capaz de conseguirlo. Esta medida es la medida exterior de Hausdorff, la cual hemos probado que es igual a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, permite medir objetos de dimensiones menores. Gracias a ella hemos podido formular, en forma de teoremas, la fórmula del área y de la coarea, extensiones del teorema de cambio de variable y del teorema de Fubini respectivamente a funciones Lipschitz, condición menos restrictiva que la de derivabilidad. Gracias a ellas hemos podido comprobar que calcular longitudes, áreas y volúmenes de diferentes variedades en cualquier espacio no es tan complicado como aparenta.

Hemos podido obtener y demostrar de una manera sencilla, gracias a la fórmula del área, todas aquellas fórmulas de la geometría diferencial para obtener longitudes y áreas que habíamos visto a lo largo de la carrera, al igual que demostrar el teorema de cambio de variable tan utilizado estos años.

Intuitivamente se cree que, por ejemplo, la suma de las longitudes de las líneas inclinadas que forman un paralelogramo es su área (aplicando Fubini), pero hemos demostrado, para éste y otros ejemplos, que esto no es cierto, como por ejemplo descomponer la esfera en sus paralelos o descomponer la gráfica de una función $z = f(x, y)$ en sus curvas de nivel. Es la fórmula de la coarea la que nos advierte que el Jacobiano de las funciones influye en el área o volumen de éstas.

Bibliografía

[1] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA, *Apuntes de Teoría de la Medida*, volumen 2, Badajoz, 22 de enero de 2018, http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf

[2] LAWRENCE C. EVANS y RONALD F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, 2015.

[3] C.SWARTZ, *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[4] F.HAUSDORFF, *Dimension und äußeres Maß*, Mathematische Annalen, 79 (1919), 157-179, http://eudml.org/doc/158784

[5] ANDREA FILIPPONI y DORA MARTUCCI, *La formula di Coarea e alcune sue applicazioni*, http://www.mat.uniroma3.it/didattica_interattiva/aa_11_12/am310/formula_di_coarea.pdf